Métodos Matemáticos I
Funciones complejas elementales

Javier Pérez González

Universidad de Granada
Departamento de Análisis Matemático

November 11, 2012

La *exponencial compleja* es la función definida para todo $z \in \mathbb{C}$ por

$$\boxed{\exp(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^n = \lim_{n\to\infty} \left\{ 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \cdots + \frac{z^n}{n!} \right\}}$$

Propiedades de la función exponencial

- $\exp'(z) = \exp(z)$ para todo $z \in \mathbb{C}$.

Propiedades de la función exponencial

- $\exp'(z) = \exp(z)$ para todo $z \in \mathbb{C}$.
- $\exp(0) = 1$

Propiedades de la función exponencial

- $\exp'(z) = \exp(z)$ para todo $z \in \mathbb{C}$.
- $\exp(0) = 1$
- Las dos propiedades anteriores caracterizan a la función exponencial, esto es, si $\varphi \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$ es tal que $\varphi'(z) = \varphi(z)$ para cada $z \in \mathbb{C}$ y $\varphi(0) = 1$ entonces $\varphi(z) = \exp(z)$.

Propiedades de la función exponencial

- $\exp'(z) = \exp(z)$ para todo $z \in \mathbb{C}$.
- $\exp(0) = 1$
- Las dos propiedades anteriores caracterizan a la función exponencial, esto es, si $\varphi \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$ es tal que $\varphi'(z) = \varphi(z)$ para cada $z \in \mathbb{C}$ y $\varphi(0) = 1$ entonces $\varphi(z) = \exp(z)$.
- $\exp(x)$ para $x \in \mathbb{R}$ coincide con la exponencial real, esto es, la exponencial compleja extiende a la exponencial real. Esto justifica el uso de la notación $\exp(z) = e^z$.

Propiedades de la función exponencial

- $\exp'(z) = \exp(z)$ para todo $z \in \mathbb{C}$.
- $\exp(0) = 1$
- Las dos propiedades anteriores caracterizan a la función exponencial, esto es, si $\varphi \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$ es tal que $\varphi'(z) = \varphi(z)$ para cada $z \in \mathbb{C}$ y $\varphi(0) = 1$ entonces $\varphi(z) = \exp(z)$.
- $\exp(x)$ para $x \in \mathbb{R}$ coincide con la exponencial real, esto es, la exponencial compleja extiende a la exponencial real. Esto justifica el uso de la notación $\exp(z) = e^z$.
- **Teorema de adición**: $\exp(z + w) = \exp(z)\exp(w)$

Propiedades de la función exponencial

- **Fórmula de Euler**: Dado $t \in \mathbb{R}$ se cumple $\exp(it) = \cos t + i \operatorname{sen} t$.

Propiedades de la función exponencial

- **Fórmula de Euler**: Dado $t \in \mathbb{R}$ se cumple $\exp(it) = \cos t + i \operatorname{sen} t$.
- Dado $z = \operatorname{Re}(z) + i \operatorname{Im}(z) \in \mathbb{C}$ entonces

$$\boxed{e^z = e^{\operatorname{Re}(z)}\big(\cos(\operatorname{Im} z) + i \operatorname{sen}(\operatorname{Im} z)\big)}$$

Por tanto $\boxed{|e^z| = e^{\operatorname{Re} z}, \quad \operatorname{Im} z \in \operatorname{Arg}(e^z)}$.

Propiedades de la función exponencial

- **Fórmula de Euler**: Dado $t \in \mathbb{R}$ se cumple $\exp(it) = \cos t + i \operatorname{sen} t$.
- Dado $z = \operatorname{Re}(z) + i \operatorname{Im}(z) \in \mathbb{C}$ entonces

$$\boxed{e^z = e^{\operatorname{Re}(z)}\big(\cos(\operatorname{Im} z) + i \operatorname{sen}(\operatorname{Im} z)\big)}$$

  Por tanto $\boxed{|e^z| = e^{\operatorname{Re} z}, \quad \operatorname{Im} z \in \operatorname{Arg}(e^z)}$.
- **La exponencial compleja no se anula nunca.**

- **Fórmula de Euler**: Dado $t \in \mathbb{R}$ se cumple $\exp(it) = \cos t + i \operatorname{sen} t$.
- Dado $z = \operatorname{Re}(z) + i \operatorname{Im}(z) \in \mathbb{C}$ entonces

$$\boxed{e^z = e^{\operatorname{Re}(z)}\big(\cos(\operatorname{Im} z) + i \operatorname{sen}(\operatorname{Im} z)\big)}$$

Por tanto $\boxed{|e^z| = e^{\operatorname{Re} z}, \quad \operatorname{Im} z \in \operatorname{Arg}(e^z)}$.

- **La exponencial compleja no se anula nunca.**
- **La exponencial compleja es una función periódica** de periodo $2\pi i$. Concretamente $e^z = e^w$ si, y sólo si, $z - w \in 2\pi i\,\mathbb{Z}$.

Propiedades de la función exponencial

- **Fórmula de Euler**: Dado $t \in \mathbb{R}$ se cumple $\exp(it) = \cos t + i \operatorname{sen} t$.
- Dado $z = \operatorname{Re}(z) + i \operatorname{Im}(z) \in \mathbb{C}$ entonces

$$\boxed{e^z = e^{\operatorname{Re}(z)}\big(\cos(\operatorname{Im} z) + i \operatorname{sen}(\operatorname{Im} z)\big)}$$

  Por tanto $\boxed{|e^z| = e^{\operatorname{Re} z}, \quad \operatorname{Im} z \in \operatorname{Arg}(e^z)}$.
- **La exponencial compleja no se anula nunca.**
- **La exponencial compleja es una función periódica** de periodo $2\pi i$. Concretamente $e^z = e^w$ si, y sólo si, $z - w \in 2\pi i\, \mathbb{Z}$.
- La exponencial compleja es una función analítica.

Forma exponencial de un número complejo

El uso de la función exponencial permite escribir un número complejo en la forma $z = |z|\,e^{it}$ donde $t \in \operatorname{Arg}(z)$ y se dice que z está escrito en **forma exponencial**.

Forma exponencial de un número complejo

El uso de la función exponencial permite escribir un número complejo en la forma $z = |z|\,\mathrm{e}^{it}$ donde $t \in \mathrm{Arg}(z)$ y se dice que z está escrito en **forma exponencial**.

Observa que la fórmula de De Moivre se expresa ahora simplemente por $z^n = |z|^n\,\mathrm{e}^{int}$.

Dado $z \in \mathbb{C}^*$ hay infinitos números complejos $w \in \mathbb{C}$ que verifican que $e^w = z$.

Dado $z \in \mathbb{C}^*$ hay infinitos números complejos $w \in \mathbb{C}$ que verifican que $e^w = z$.

En efecto, como

$$e^w = e^{\operatorname{Re} w}\big(\cos(\operatorname{Im} w) + i \operatorname{sen}(\operatorname{Im} w)\big)$$

Dado $z \in \mathbb{C}^*$ hay infinitos números complejos $w \in \mathbb{C}$ que verifican que $e^w = z$.

En efecto, como

$$e^w = e^{\operatorname{Re} w}\big(\cos(\operatorname{Im} w) + i \operatorname{sen}(\operatorname{Im} w)\big)$$

Para que $e^w = z$ es necesario y suficiente que:

- $|e^w| = |z|$, esto es, $e^{\operatorname{Re} w} = |z|$, es decir, $\operatorname{Re} w = \log|z|$ (logaritmo natural del número real positivo $|z|$).

Dado $z \in \mathbb{C}^*$ hay infinitos números complejos $w \in \mathbb{C}$ que verifican que $e^w = z$.

En efecto, como

$$e^w = e^{\operatorname{Re} w}\big(\cos(\operatorname{Im} w) + i \operatorname{sen}(\operatorname{Im} w)\big)$$

Para que $e^w = z$ es necesario y suficiente que:

- $|e^w| = |z|$, esto es, $e^{\operatorname{Re} w} = |z|$, es decir, $\operatorname{Re} w = \log|z|$ (logaritmo natural del número real positivo $|z|$).
- $\operatorname{Arg}(e^w) = \operatorname{Arg}(z)$, esto es, $\operatorname{Im} w \in \operatorname{Arg} z$ y esto se cumple si, y sólo si $\operatorname{Im} w = \arg(z) + 2k\pi$, con $k \in \mathbb{Z}$.

Dado $z \in \mathbb{C}^*$ hay infinitos números complejos $w \in \mathbb{C}$ que verifican que $e^w = z$.

En efecto, como

$$e^w = e^{\operatorname{Re} w}\big(\cos(\operatorname{Im} w) + i \operatorname{sen}(\operatorname{Im} w)\big)$$

Para que $e^w = z$ es necesario y suficiente que:

- $|e^w| = |z|$, esto es, $e^{\operatorname{Re} w} = |z|$, es decir, $\operatorname{Re} w = \log|z|$ (logaritmo natural del número real positivo $|z|$).
- $\operatorname{Arg}(e^w) = \operatorname{Arg}(z)$, esto es, $\operatorname{Im} w \in \operatorname{Arg} z$ y esto se cumple si, y sólo si $\operatorname{Im} w = \arg(z) + 2k\pi$, con $k \in \mathbb{Z}$.

Dado $z \in \mathbb{C}^*$ hay infinitos números complejos $w \in \mathbb{C}$ que verifican que $e^w = z$.

En efecto, como

$$e^w = e^{\operatorname{Re} w}\big(\cos(\operatorname{Im} w) + i \operatorname{sen}(\operatorname{Im} w)\big)$$

Para que $e^w = z$ es necesario y suficiente que:

- $|e^w| = |z|$, esto es, $e^{\operatorname{Re} w} = |z|$, es decir, $\operatorname{Re} w = \log|z|$ (logaritmo natural del número real positivo $|z|$).
- $\operatorname{Arg}(e^w) = \operatorname{Arg}(z)$, esto es, $\operatorname{Im} w \in \operatorname{Arg} z$ y esto se cumple si, y sólo si $\operatorname{Im} w = \arg(z) + 2k\pi$, con $k \in \mathbb{Z}$.

Hemos probado que

$$\{w \in \mathbb{C} : e^w = z\} = \{\log|z| + i(\arg(z) + 2k\pi), k \in \mathbb{Z}\}$$

Por tanto, hay infinitos $w \in \mathbb{C}$ que satisfacen la igualdad $\mathrm{e}^w = z$. Cualquiera de ellos se llama *un logaritmo* de z. El conjunto de todos ellos lo representaremos por $\operatorname{Log} z$.

$$\boxed{\operatorname{Log} z = \{\log|z| + i(\arg(z) + 2k\pi), k \in \mathbb{Z}\} = \log|z| + i\operatorname{Arg}(z) \quad (z \in \mathbb{C}^*)}$$

Por tanto, hay infinitos $w \in \mathbb{C}$ que satisfacen la igualdad $e^w = z$. Cualquiera de ellos se llama *un logaritmo* de z. El conjunto de todos ellos lo representaremos por $\operatorname{Log} z$.

$$\boxed{\operatorname{Log} z = \{\log|z| + i(\arg(z) + 2k\pi), k \in \mathbb{Z}\} = \log|z| + i\operatorname{Arg}(z) \quad (z \in \mathbb{C}^*)}$$

De entre todos ellos elegimos uno, llamado *logaritmo principal* (o rama principal del logaritmo), definido por

$$\boxed{\log z = \log|z| + i\arg(z) \quad (z \in \mathbb{C}^*)}$$

Por tanto, hay infinitos $w \in \mathbb{C}$ que satisfacen la igualdad $e^w = z$. Cualquiera de ellos se llama *un logaritmo* de z. El conjunto de todos ellos lo representaremos por $\operatorname{Log} z$.

$$\boxed{\operatorname{Log} z = \{\log|z| + i(\arg(z) + 2k\pi), k \in \mathbb{Z}\} = \log|z| + i \operatorname{Arg}(z) \quad (z \in \mathbb{C}^*)}$$

De entre todos ellos elegimos uno, llamado *logaritmo principal* (o rama principal del logaritmo), definido por

$$\boxed{\log z = \log|z| + i \arg(z) \quad (z \in \mathbb{C}^*)}$$

Observa que para $z \in \mathbb{R}^+$ el logaritmo principal, $\log z$, coincide con el logaritmo natural de z.

Por tanto, hay infinitos $w \in \mathbb{C}$ que satisfacen la igualdad $e^w = z$. Cualquiera de ellos se llama *un logaritmo* de z. El conjunto de todos ellos lo representaremos por $\operatorname{Log} z$.

$$\boxed{\operatorname{Log} z = \{\log|z| + i(\arg(z) + 2k\pi), k \in \mathbb{Z}\} = \log|z| + i\operatorname{Arg}(z) \quad (z \in \mathbb{C}^*)}$$

De entre todos ellos elegimos uno, llamado *logaritmo principal* (o rama principal del logaritmo), definido por

$$\boxed{\log z = \log|z| + i\arg(z) \quad (z \in \mathbb{C}^*)}$$

Observa que para $z \in \mathbb{R}^+$ el logaritmo principal, $\log z$, coincide con el logaritmo natural de z.
Observa que cualquier otro logaritmo de z es de la forma $\log z + i2k\pi$ para algún entero k.

El logaritmo principal es continuo en $\mathbb{C}^*\backslash\mathbb{R}^-$ y es discontinuo en $\mathbb{R}^-$.

El logaritmo principal es continuo en $\mathbb{C}^*\backslash\mathbb{R}^-$ y es discontinuo en $\mathbb{R}^-$.

Como
$$\exp(\log z + \log w) = \exp(\log z)\exp(\log w) = zw$$
Se verifica que $\log z + \log w$ es *un* logaritmo de zw pero no tiene por qué ser el logaritmo *principal* de zw.

El logaritmo principal es continuo en $\mathbb{C}^*\backslash\mathbb{R}^-$ y es discontinuo en $\mathbb{R}^-$.

Como

$$\exp(\log z + \log w) = \exp(\log z)\exp(\log w) = zw$$

Se verifica que $\log z + \log w$ es *un* logaritmo de zw pero no tiene por qué ser el logaritmo *principal* de zw.

De hecho, tenemos que

$$\log(zw) = \log z + \log w \Longleftrightarrow -\pi < \arg(z) + \arg(w) < \pi$$

Ramas del logaritmo y del argumento

Sea $f : A \to \mathbb{C}^*$, con $A \subseteq \mathbb{C}$ un subconjunto no vacío de $\mathbb{C}$.

Sea $f : A \to \mathbb{C}^*$, con $A \subseteq \mathbb{C}$ un subconjunto no vacío de $\mathbb{C}$.

- Cualquier función $g : A \to \mathbb{C}$ tal que $g(z) \in \operatorname{Log} f(z)$ para todo $z \in A$ se llama *un logaritmo de f en A* o **una rama del logaritmo de f en A**. Cuando f es la identidad se dice simplemente que g es *un logaritmo* en A o **una rama del logaritmo en A**.

Ramas del logaritmo y del argumento

Sea $f : A \to \mathbb{C}^*$, con $A \subseteq \mathbb{C}$ un subconjunto no vacío de $\mathbb{C}$.

- Cualquier función $g : A \to \mathbb{C}$ tal que $g(z) \in \operatorname{Log} f(z)$ para todo $z \in A$ se llama *un logaritmo de f en A* o **una rama del logaritmo de f en A**. Cuando f es la identidad se dice simplemente que g es *un logaritmo* en A o **una rama del logaritmo en A**.
- Cualquier función $\vartheta : A \to \mathbb{R}$ tal que $\vartheta(z) \in \operatorname{Arg} f(z)$ para todo $z \in A$ se llama *un argumento de f en A* o **una rama del argumento de f en A**. Cuando f es la identidad se dice simplemente que ϑ es un argumento en A o **una rama del argumento en A**.

En este curso estaremos interesados en el siguiente problema:

En este curso estaremos interesados en el siguiente problema:

Dada una función holomorfa que no se anula en un abierto Ω, ¿existen logaritmos holomorfos de f en Ω? (dicho de otra forma ¿existen ramas holomorfas del logaritmo de f en Ω?)

En este curso estaremos interesados en el siguiente problema:

Dada una función holomorfa que no se anula en un abierto Ω, ¿existen logaritmos holomorfos de f en Ω? (dicho de otra forma ¿existen ramas holomorfas del logaritmo de f en Ω?)

Respuestas cada vez más precisas a este problema se irán obteniendo a lo largo del curso.

Un logaritmo continuo de una función holomorfa es automáticamente un logaritmo holomorfo.

Un logaritmo continuo de una función holomorfa es automáticamente un logaritmo holomorfo.

Sea $f : A \to \mathbb{C}^*$, con $A \subseteq \mathbb{C}$ y $a \in A \cap A'$. Sea $g : A \to \mathbb{C}$ un logaritmo de f en A. Supongamos además que f es derivable en a y que g es continua en a. Entonces g es derivable en a y

$$g'(a) = \frac{f'(a)}{f(a)}$$

Un logaritmo continuo de una función holomorfa es automáticamente un logaritmo holomorfo.

Sea $f : A \to \mathbb{C}^*$, con $A \subseteq \mathbb{C}$ y $a \in A \cap A'$. Sea $g : A \to \mathbb{C}$ un logaritmo de f en A. Supongamos además que f es derivable en a y que g es continua en a. Entonces g es derivable en a y

$$g'(a) = \frac{f'(a)}{f(a)}$$

En consecuencia, si $f \in \mathcal{H}(\Omega)$, $0 \notin f(\Omega)$ y $g : \Omega \to \mathbb{C}$ es continua en Ω y tal que $e^{g(z)} = f(z)$ para cada $z \in \Omega$, entonces $g \in \mathcal{H}(\Omega)$ y $g'(z) = \dfrac{f'(z)}{f(z)}$ para todo $z \in \Omega$.

Un logaritmo continuo de una función holomorfa es automáticamente un logaritmo holomorfo.

Sea $f : A \to \mathbb{C}^*$, con $A \subseteq \mathbb{C}$ y $a \in A \cap A'$. Sea $g : A \to \mathbb{C}$ un logaritmo de f en A. Supongamos además que f es derivable en a y que g es continua en a. Entonces g es derivable en a y

$$g'(a) = \frac{f'(a)}{f(a)}$$

En consecuencia, si $f \in \mathcal{H}(\Omega)$, $0 \notin f(\Omega)$ y $g : \Omega \to \mathbb{C}$ es continua en Ω y tal que $e^{g(z)} = f(z)$ para cada $z \in \Omega$, entonces $g \in \mathcal{H}(\Omega)$ y $g'(z) = \dfrac{f'(z)}{f(z)}$ para todo $z \in \Omega$.

El logaritmo principal es una función holomorfa en $\mathbb{C}^* \backslash \mathbb{R}^-$ y su derivada viene dada por $\log'(z) = \dfrac{1}{z}$ para todo $z \in \mathbb{C}^* \backslash \mathbb{R}^-$.

Sea $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ un abierto y $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}^*$ una función holomorfa. Equivalen las siguientes afirmaciones:

Sea $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ un abierto y $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}^*$ una función holomorfa. Equivalen las siguientes afirmaciones:

- f tiene argumentos continuos en Ω, es decir, existe una función continua $\vartheta : \Omega \to \mathbb{R}$ tal que $\vartheta(z) \in \operatorname{Arg}(f(z))$ para $z \in \Omega$.

Sea $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ un abierto y $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}^*$ una función holomorfa. Equivalen las siguientes afirmaciones:

- f tiene argumentos continuos en Ω, es decir, existe una función continua $\vartheta : \Omega \to \mathbb{R}$ tal que $\vartheta(z) \in \operatorname{Arg}(f(z))$ para $z \in \Omega$.
- f tiene logaritmos continuos en Ω, es decir, existe una función continua $g : \Omega \to \mathbb{C}$ tal que $g(z) \in \operatorname{Log} f(z)$ para $z \in \Omega$.

Sea $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ un abierto y $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}^*$ una función holomorfa. Equivalen las siguientes afirmaciones:

- f tiene argumentos continuos en Ω, es decir, existe una función continua $\vartheta : \Omega \to \mathbb{R}$ tal que $\vartheta(z) \in \operatorname{Arg}(f(z))$ para $z \in \Omega$.
- f tiene logaritmos continuos en Ω, es decir, existe una función continua $g : \Omega \to \mathbb{C}$ tal que $g(z) \in \operatorname{Log} f(z)$ para $z \in \Omega$.
- f tiene logaritmos holomorfos en Ω, es decir, existe una función holomorfa $g : \Omega \to \mathbb{C}$ tal que $g(z) \in \operatorname{Log} f(z)$ para $z \in \Omega$.

Sea $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ un abierto y $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}^*$ una función holomorfa. Equivalen las siguientes afirmaciones:

- f tiene argumentos continuos en Ω, es decir, existe una función continua $\vartheta : \Omega \to \mathbb{R}$ tal que $\vartheta(z) \in \operatorname{Arg}(f(z))$ para $z \in \Omega$.
- f tiene logaritmos continuos en Ω, es decir, existe una función continua $g : \Omega \to \mathbb{C}$ tal que $g(z) \in \operatorname{Log} f(z)$ para $z \in \Omega$.
- f tiene logaritmos holomorfos en Ω, es decir, existe una función holomorfa $g : \Omega \to \mathbb{C}$ tal que $g(z) \in \operatorname{Log} f(z)$ para $z \in \Omega$.
- La función $\dfrac{f'(z)}{f(z)}$ tiene primitivas en Ω, es decir, existe $\varphi \in \mathcal{H}(\Omega)$ tal que $\varphi'(z) = \dfrac{f'(z)}{f(z)}$ para todo $z \in \Omega$.

En cualquier disco que no contenga al origen hay logaritmos holomorfos. Concretamente, si $a \in \mathbb{C}^*$, entonces en el disco $D(a, |a|)$ hay logaritmos holomorfos.

En cualquier disco que no contenga al origen hay logaritmos holomorfos. Concretamente, si $a \in \mathbb{C}^*$, entonces en el disco $D(a, |a|)$ hay logaritmos holomorfos.

El logaritmo principal es una función analítica en $\mathbb{C}^* \setminus \mathbb{R}^-$.

En cualquier disco que no contenga al origen hay logaritmos holomorfos. Concretamente, si $a \in \mathbb{C}^*$, entonces en el disco $D(a, |a|)$ hay logaritmos holomorfos.

El logaritmo principal es una función analítica en $\mathbb{C}^* \backslash \mathbb{R}^-$.

De hecho, para $a \in \mathbb{C}^* \backslash \mathbb{R}^-$ se verifica que

$$\log z = \log a + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)a^{n+1}} (z-a)^{n+1} \qquad \forall z \in D(a, \rho_a)$$

donde

$$\rho_a = \begin{cases} |a| & \text{si } \operatorname{Re} a \geqslant 0 \\ |\operatorname{Im} a| & \text{si } \operatorname{Re} a < 0 \end{cases}$$

Sea $A \subset \mathbb{C}$ un conjunto *conexo* y supongamos que en A hay una rama continua, φ, del argumento. Entonces cualquier otro argumento continuo en A es de la forma $\varphi + 2k\pi$ para algún entero k.

Sea $A \subset \mathbb{C}$ un conjunto *conexo* y supongamos que en A hay una rama continua, φ, del argumento. Entonces cualquier otro argumento continuo en A es de la forma $\varphi + 2k\pi$ para algún entero k.

Sea A un subconjunto de $\mathbb{C}^*$ que contiene a una circunferencia centrada en cero entonces en A no hay ninguna rama continua del argumento. En particular, en $\mathbb{C}^*$ no hay argumentos continuos.

Dados una función compleja, f, definida en un subconjunto A de $\mathbb{C}$ y un número natural $n \geqslant 2$, cualquier función, $h : A \to \mathbb{C}$, tal que $(h(z))^n = f(z)$ para todo $z \in A$, se llama una *(función) raíz de orden n de f en A* o **una rama de la raíz n-ésima de f en A**. Una raíz de orden n de la función identidad en A se llama, simplemente, *una raíz de orden n en A* o **una rama de la raíz n-ésima en A**. Como de costumbre las (funciones) raíces de orden 2 se llaman raíces cuadradas. Las expresiones “raíz de orden n continua” o “raíz de orden n holomorfa” se entienden por sí mismas.

Dados una función compleja, f, definida en un subconjunto A de $\mathbb{C}$ y un número natural $n \geqslant 2$, cualquier función, $h : A \to \mathbb{C}$, tal que $(h(z))^n = f(z)$ para todo $z \in A$, se llama una *(función) raíz de orden n de f en A* o **una rama de la raíz n-ésima de f en A**. Una raíz de orden n de la función identidad en A se llama, simplemente, *una raíz de orden n en A* o **una rama de la raíz n-ésima en A**. Como de costumbre las (funciones) raíces de orden 2 se llaman raíces cuadradas. Las expresiones "raíz de orden n continua" o "raíz de orden n holomorfa" se entienden por sí mismas.

Sea f una función holomorfa y que no se anula en un abierto Ω. Si f tiene un logaritmo holomorfo en Ω entonces, para todo $n \in \mathbb{N}$, f también tiene raíces n-ésimas holomorfas en Ω.

Recuerda que dados dos números reales $a > 0$ y $b \in \mathbb{R}$, la potencia de base a y exponente b se define como $a^b = e^{b \log a}$.

Recuerda que dados dos números reales $a > 0$ y $b \in \mathbb{R}$, la potencia de base a y exponente b se define como $a^b = e^{b \log a}$.

Ahora, dados $a, b \in \mathbb{C}$, con $a \neq 0$, sabemos que hay infinitos logaritmos de a, todos ellos son de la forma $\log a + i\, 2k\pi$, con $k \in \mathbb{Z}$. Por ello, cualquier número complejo de la forma $\mathrm{e}^{b(\log a + i\, 2k\pi)}$ donde $k \in \mathbb{Z}$, es *una* potencia de base a y exponente b.

Recuerda que dados dos números reales $a > 0$ y $b \in \mathbb{R}$, la potencia de base a y exponente b se define como $a^b = e^{b \log a}$.

Ahora, dados $a, b \in \mathbb{C}$, con $a \neq 0$, sabemos que hay infinitos logaritmos de a, todos ellos son de la forma $\log a + i\,2k\pi$, con $k \in \mathbb{Z}$. Por ello, cualquier número complejo de la forma $\mathrm{e}^{b(\log a + i\,2k\pi)}$ donde $k \in \mathbb{Z}$, es *una* potencia de base a y exponente b.

Representaremos por $[a^b]$ el conjunto de todas ellas.

$$\boxed{[a^b] = \exp(b\,\mathrm{Log}(a)) = \{\exp(bw) : w \in \mathrm{Log}(a)\}}$$

Recuerda que dados dos números reales $a > 0$ y $b \in \mathbb{R}$, la potencia de base a y exponente b se define como $a^b = e^{b \log a}$.

Ahora, dados $a, b \in \mathbb{C}$, con $a \neq 0$, sabemos que hay infinitos logaritmos de a, todos ellos son de la forma $\log a + i\,2k\pi$, con $k \in \mathbb{Z}$. Por ello, cualquier número complejo de la forma $\mathrm{e}^{b(\log a + i\,2k\pi)}$ donde $k \in \mathbb{Z}$, es *una* potencia de base a y exponente b.

Representaremos por $[a^b]$ el conjunto de todas ellas.

$$\boxed{[a^b] = \exp(b\,\mathrm{Log}(a)) = \{\exp(bw) : w \in \mathrm{Log}(a)\}}$$

De entre las potencias de base a y exponente b se destaca una:

$$\boxed{a^b = \mathrm{e}^{b \log a}}$$

y dicho número se llama *valor principal* (o rama principal) de la potencia de base a y exponente b.

Observa que si $b = 1/n$ donde $n \in \mathbb{N}$, entonces:

$$\begin{aligned}[a^{1/n}] &= \left\{\exp\left(\frac{1}{n}\Big(\log|a| + i\arg(a) + 2k\pi i\Big)\right) : k \in \mathbb{Z}\right\} = \\ &= \left\{\exp\left(\frac{1}{n}\log|a|\right)\,\exp\left(\frac{i}{n}\Big(\arg(a) + 2k\pi\Big)\right) : k \in \mathbb{Z}\right\} = \\ &= \left\{\sqrt[n]{|a|}\Big(\cos\frac{\arg(a) + 2k\pi}{n} + i\,\mathrm{sen}\,\frac{\arg(a) + 2k\pi}{n}\Big) : k \in \mathbb{Z}\right\}\end{aligned}$$

Observa que si $b = 1/n$ donde $n \in \mathbb{N}$, entonces:

$$\begin{aligned}
[a^{1/n}] &= \left\{\exp\left(\frac{1}{n}\Big(\log|a| + i\arg(a) + 2k\pi i\Big)\right) : k \in \mathbb{Z}\right\} = \\
&= \left\{\exp\left(\frac{1}{n}\log|a|\right)\exp\left(\frac{i}{n}\Big(\arg(a) + 2k\pi\Big)\right) : k \in \mathbb{Z}\right\} = \\
&= \left\{\sqrt[n]{|a|}\Big(\cos\frac{\arg(a) + 2k\pi}{n} + i\,\mathrm{sen}\,\frac{\arg(a) + 2k\pi}{n}\Big) : k \in \mathbb{Z}\right\}
\end{aligned}$$

Es decir, $[a^{1/n}]$ es el conjunto de las raíces n-ésimas de a.

Observa que si $b = 1/n$ donde $n \in \mathbb{N}$, entonces:

$$
\begin{aligned}
[a^{1/n}] &= \left\{ \exp\left(\frac{1}{n} \left(\log|a| + i \arg(a) + 2k\pi i \right) \right) : k \in \mathbb{Z} \right\} = \\
&= \left\{ \exp\left(\frac{1}{n} \log|a| \right) \exp\left(\frac{i}{n} \left(\arg(a) + 2k\pi \right) \right) : k \in \mathbb{Z} \right\} = \\
&= \left\{ \sqrt[n]{|a|} \left(\cos \frac{\arg(a) + 2k\pi}{n} + i \operatorname{sen} \frac{\arg(a) + 2k\pi}{n} \right) : k \in \mathbb{Z} \right\}
\end{aligned}
$$

Es decir, $[a^{1/n}]$ es el conjunto de las raíces n-ésimas de a. Además

$$
a^{1/n} = \exp\left(\frac{1}{n} \log a \right) = \exp\left(\frac{\log|a|}{n} + i \frac{\arg a}{n} \right) = |a|^{1/n} \left(\cos \frac{\arg a}{n} + i \operatorname{sen} \frac{\arg a}{n} \right)
$$

Observa que si $b = 1/n$ donde $n \in \mathbb{N}$, entonces:

$$\begin{aligned}
[a^{1/n}] &= \left\{ \exp\left(\frac{1}{n} \left(\log|a| + i \arg(a) + 2k\pi i \right) \right) : k \in \mathbb{Z} \right\} = \\
&= \left\{ \exp\left(\frac{1}{n} \log|a| \right) \exp\left(\frac{i}{n} \left(\arg(a) + 2k\pi \right) \right) : k \in \mathbb{Z} \right\} = \\
&= \left\{ \sqrt[n]{|a|} \left(\cos \frac{\arg(a) + 2k\pi}{n} + i \operatorname{sen} \frac{\arg(a) + 2k\pi}{n} \right) : k \in \mathbb{Z} \right\}
\end{aligned}$$

Es decir, $[a^{1/n}]$ es el conjunto de las raíces n-ésimas de a. Además

$$a^{1/n} = \exp\left(\frac{1}{n} \log a \right) = \exp\left(\frac{\log|a|}{n} + i \frac{\arg a}{n} \right) = |a|^{1/n} \left(\cos \frac{\arg a}{n} + i \operatorname{sen} \frac{\arg a}{n} \right)$$

es el valor principal de la raíz n-ésima de a que antes hemos notado por $\sqrt[n]{a}$.

La función exponencial compleja de base $a \in \mathbb{C}^*$, $z \longmapsto a^z$, está definida por $a^z = \exp(z \log a)$ y es una función entera.

La función exponencial compleja de base $a \in \mathbb{C}^*$, $z \longmapsto a^z$, está definida por $a^z = \exp(z \log a)$ y es una función entera.

La función potencia compleja de exponente b, es la función $z \mapsto z^b$, dada por $z^b = \exp(b \log z)$ es holomorfa en $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_o^-$.

La función exponencial compleja de base $a \in \mathbb{C}^*$, $z \longmapsto a^z$, está definida por $a^z = \exp(z \log a)$ y es una función entera.

La función potencia compleja de exponente b, es la función $z \mapsto z^b$, dada por $z^b = \exp(b \log z)$ es holomorfa en $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_o^-$.

Las funciones exponenciales cumplen la igualdad $a^{z+w} = a^z a^w$.

La función exponencial compleja de base $a \in \mathbb{C}^*$, $z \longmapsto a^z$, está definida por $a^z = \exp(z \log a)$ y es una función entera.

La función potencia compleja de exponente b, es la función $z \mapsto z^b$, dada por $z^b = \exp(b \log z)$ es holomorfa en $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_o^-$.

Las funciones exponenciales cumplen la igualdad $a^{z+w} = a^z a^w$.

Para las funciones potencia no se cumple en general la igualdad $(zw)^b = z^b w^b$.

La función exponencial compleja de base $a \in \mathbb{C}^*$, $z \longmapsto a^z$, está definida por $a^z = \exp(z \log a)$ y es una función entera.

La función potencia compleja de exponente b, es la función $z \mapsto z^b$, dada por $z^b = \exp(b \log z)$ es holomorfa en $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_o^-$.

Las funciones exponenciales cumplen la igualdad $a^{z+w} = a^z a^w$.

Para las funciones potencia no se cumple en general la igualdad $(zw)^b = z^b w^b$.

La igualdad $(z^b)^c = z^{bc}$ no es cierta en general.

Sustituyendo en la fórmula de Euler $e^{it} = \cos t + i \operatorname{sen} t$, t por $-t$ tenemos $e^{-it} = \cos(-t) + i \operatorname{sen}(-t) = \cos t - i \operatorname{sen} t$ y despejando obtenemos las llamadas "ecuaciones de Euler":

$$\boxed{\cos t = \frac{e^{it} + e^{-it}}{2}, \qquad \operatorname{sen} t = \frac{e^{it} - e^{-it}}{2i}}$$

Sustituyendo en la fórmula de Euler $e^{it} = \cos t + i \operatorname{sen} t$, t por $-t$ tenemos $e^{-it} = \cos(-t) + i \operatorname{sen}(-t) = \cos t - i \operatorname{sen} t$ y despejando obtenemos las llamadas "ecuaciones de Euler":

$$\boxed{\cos t = \frac{e^{it} + e^{-it}}{2}, \qquad \operatorname{sen} t = \frac{e^{it} - e^{-it}}{2i}}$$

Estas igualdades, válidas para todo $t \in \mathbb{R}$, también tienen sentido para números complejos. Por ello, para todo $z \in \mathbb{C}$ definimos el coseno y el seno complejos por:

$$\boxed{\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, \qquad \operatorname{sen} z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}}$$

Sustituyendo en la fórmula de Euler $e^{it} = \cos t + i \operatorname{sen} t$, t por $-t$ tenemos $e^{-it} = \cos(-t) + i \operatorname{sen}(-t) = \cos t - i \operatorname{sen} t$ y despejando obtenemos las llamadas “ecuaciones de Euler”:

$$\boxed{\cos t = \frac{e^{it} + e^{-it}}{2}, \qquad \operatorname{sen} t = \frac{e^{it} - e^{-it}}{2i}}$$

Estas igualdades, válidas para todo $t \in \mathbb{R}$, también tienen sentido para números complejos. Por ello, para todo $z \in \mathbb{C}$ definimos el coseno y el seno complejos por:

$$\boxed{\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, \qquad \operatorname{sen} z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}}$$

El seno y coseno complejos extienden a las funciones seno y coseno reales.

Sustituyendo en la fórmula de Euler $e^{it} = \cos t + i \operatorname{sen} t$, t por $-t$ tenemos $e^{-it} = \cos(-t) + i \operatorname{sen}(-t) = \cos t - i \operatorname{sen} t$ y despejando obtenemos las llamadas “ecuaciones de Euler”:

$$\boxed{\cos t = \frac{e^{it} + e^{-it}}{2}, \qquad \operatorname{sen} t = \frac{e^{it} - e^{-it}}{2i}}$$

Estas igualdades, válidas para todo $t \in \mathbb{R}$, también tienen sentido para números complejos. Por ello, para todo $z \in \mathbb{C}$ definimos el coseno y el seno complejos por:

$$\boxed{\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, \qquad \operatorname{sen} z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}}$$

El seno y coseno complejos extienden a las funciones seno y coseno reales.

Sus propiedades se deducen fácilmente a partir de las propiedades de la exponencial.

- Identidad fundamental: $\cos^2 z + \operatorname{sen}^2 z = 1$

- Identidad fundamental: $\cos^2 z + \operatorname{sen}^2 z = 1$
- La función coseno es par $\cos(-z) = \cos(z)$, y la función seno es impar $\operatorname{sen}(-z) = -\operatorname{sen}(z)$. Ambas son funciones periódicas con período 2π.

- Identidad fundamental: $\cos^2 z + \operatorname{sen}^2 z = 1$
- La función coseno es par $\cos(-z) = \cos(z)$, y la función seno es impar $\operatorname{sen}(-z) = -\operatorname{sen}(z)$. Ambas son funciones periódicas con período 2π.
- Fórmulas de adición

$$\operatorname{sen}(z+w) = \operatorname{sen} z \, \cos w + \cos z \, \operatorname{sen} w$$
$$\cos(z+w) = \cos z \, \cos w - \operatorname{sen} z \, \operatorname{sen} w$$

- Identidad fundamental: $\cos^2 z + \operatorname{sen}^2 z = 1$
- La función coseno es par $\cos(-z) = \cos(z)$, y la función seno es impar $\operatorname{sen}(-z) = -\operatorname{sen}(z)$. Ambas son funciones periódicas con período 2π.
- Fórmulas de adición

$$\operatorname{sen}(z+w) = \operatorname{sen} z \,\cos w + \cos z \,\operatorname{sen} w$$
$$\cos(z+w) = \cos z \,\cos w - \operatorname{sen} z \,\operatorname{sen} w$$

- Las funciones seno y coseno son enteras y analíticas en $\mathbb{C}$ y para todo $z \in \mathbb{C}$:

$$\cos'(z) = -\operatorname{sen} z, \qquad \cos z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} z^{2n}$$

$$\operatorname{sen}'(z) = \cos z, \qquad \operatorname{sen} z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n+1}$$

- Relación con las funciones hiperbólicas

$$\cos(ix) = \cosh x \qquad \operatorname{sen}(ix) = -i \operatorname{senh} x$$

- Relación con las funciones hiperbólicas

$$\cos(ix) = \cosh x \qquad \operatorname{sen}(ix) = -i \operatorname{senh} x$$

- Para todo $z = x + iy$ se cumplen las igualdades

$$\begin{aligned} \operatorname{sen} z &= \operatorname{sen} x \ \cosh y + i \cos x \ \operatorname{senh} y \\ \cos z &= \cos x \ \cosh y - i \operatorname{sen} x \ \operatorname{senh} y \end{aligned}$$

- Relación con las funciones hiperbólicas

$$\cos(ix) = \cosh x \qquad \operatorname{sen}(ix) = -i \operatorname{senh} x$$

- Para todo $z = x + iy$ se cumplen las igualdades

$$\operatorname{sen} z = \operatorname{sen} x \ \cosh y + i \cos x \ \operatorname{senh} y$$
$$\cos z = \cos x \ \cosh y - i \operatorname{sen} x \ \operatorname{senh} y$$

- Las funciones seno y coseno complejos no están acotadas en $\mathbb{C}$ aunque sí lo están en bandas horizontales de anchura acotada.

- Relación con las funciones hiperbólicas

$$\cos(ix) = \cosh x \qquad \operatorname{sen}(ix) = -i \operatorname{senh} x$$

- Para todo $z = x + iy$ se cumplen las igualdades

$$\begin{aligned}\operatorname{sen} z &= \operatorname{sen} x \, \cosh y + i \cos x \, \operatorname{senh} y \\ \cos z &= \cos x \, \cosh y - i \operatorname{sen} x \, \operatorname{senh} y\end{aligned}$$

- Las funciones seno y coseno complejos no están acotadas en $\mathbb{C}$ aunque sí lo están en bandas horizontales de anchura acotada.
- Las funciones seno y coseno complejas no tienen más ceros que los reales, esto es, $\operatorname{sen} z = 0$ si, y sólo si, z es real de la forma $k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$), y $\cos z = 0$ si, y sólo si, z es real de la forma $\dfrac{\pi}{2} + k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$).

Por analogía con la tangente real definimos la función tangente compleja como

$$\boxed{\operatorname{tg} z = \frac{\operatorname{sen} z}{\cos z} \qquad \left(z \in \mathbb{C} \setminus \{\pi/2 + k\pi : k \in \mathbb{Z}\}\right)}$$

Por analogía con la tangente real definimos la función tangente compleja como

$$\boxed{\operatorname{tg} z = \frac{\operatorname{sen} z}{\cos z} \qquad \left(z \in \mathbb{C} \setminus \{\pi/2 + k\pi : k \in \mathbb{Z}\}\right)}$$

Puesto que el seno y el coseno son funciones enteras la tangente compleja es una función holomorfa en su dominio de definición $\mathbb{C} \setminus \{z : \cos z = 0\} = \mathbb{C} \setminus \{\pi/2 + k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$.

Por analogía con la tangente real definimos la función tangente compleja como

$$\boxed{\operatorname{tg} z = \frac{\operatorname{sen} z}{\cos z} \qquad \left(z \in \mathbb{C} \setminus \{\pi/2 + k\pi : k \in \mathbb{Z}\}\right)}$$

Puesto que el seno y el coseno son funciones enteras la tangente compleja es una función holomorfa en su dominio de definición $\mathbb{C} \setminus \{z : \cos z = 0\} = \mathbb{C} \setminus \{\pi/2 + k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$.

Las propiedades de la tangente se deducen con facilidad de las propiedades del seno y el coseno.

Dado $z \in \mathbb{C}$ hay infinitos números $w \in \mathbb{C}$ tales que $\cos w = z$. El conjunto de todos ellos se representa por $\operatorname{Arccos} z$ y viene dado por:

$$\boxed{\operatorname{Arccos} z = \frac{1}{i} \operatorname{Log}(z \pm i\sqrt{1 - z^2})}$$

Dado $z \in \mathbb{C}$ hay infinitos números $w \in \mathbb{C}$ tales que $\cos w = z$. El conjunto de todos ellos se representa por $\operatorname{Arccos} z$ y viene dado por:

$$\boxed{\operatorname{Arccos} z = \frac{1}{i} \operatorname{Log}(z \pm i\sqrt{1 - z^2})}$$

De todos ellos elegimos el que corresponde al logaritmo principal y le llamamos valor principal (o rama principal) de $\operatorname{Arccos} z$ que está definido por:

$$\boxed{\arccos z = \frac{1}{i} \log(z + i\sqrt{1 - z^2})}$$

La función $\arccos z$ extiende el arcocoseno real. En efecto, para $z = x \in [-1, 1]$ tenemos que:

La función $\arccos z$ extiende el arcocoseno real. En efecto, para $z = x \in [-1, 1]$ tenemos que:

$$\frac{1}{i}\log(x + i\sqrt{1-x^2}) = \frac{1}{i}\big(\log|x + i\sqrt{1-x^2}\,| + i\arg(x + i\sqrt{1-x^2}\,)\big) =$$
$$= \arg(x + i\sqrt{1-x^2}\,)$$

La función $\arccos z$ extiende el arcocoseno real. En efecto, para $z = x \in [-1,1]$ tenemos que:

$$\frac{1}{i}\log(x + i\sqrt{1-x^2}) = \frac{1}{i}\left(\log|x + i\sqrt{1-x^2}\,| + i\arg(x + i\sqrt{1-x^2}\,)\right) =$$
$$= \arg(x + i\sqrt{1-x^2}\,)$$

Observemos que $(x, \sqrt{1-x^2}\,)$ es un punto de la mitad superior de la circunferencia unidad y una medida del ángulo que forma el número complejo $x + i\sqrt{1-x^2}$ con el eje real positivo es precisamente el arco cuyo coseno es x. Además, para $x \in [-1,1]$ se tiene que $0 \leqslant \arccos x \leqslant \pi$. Deducimos que $\arg(x + i\sqrt{1-x^2}\,) = \arccos x$.

La rama principal del arcocoseno es holomorfa en el dominio

$$\Omega = \{z \in \mathbb{C} : 1 - z^2 \notin \mathbb{R}_o^-\} = \mathbb{C} \setminus (]-\infty, -1] \cup [1, +\infty[)$$

La regla de la cadena nos permite calcular su derivada:

$$\arccos'(z) = \frac{-1}{\sqrt{1 - z^2}}$$

Como

$$\operatorname{sen} w = \cos\left(\frac{\pi}{2} - w\right)$$

Tenemos que

$$\operatorname{sen} w = z \Longleftrightarrow \frac{\pi}{2} - w \in \frac{1}{i}\operatorname{Log}\left(z \pm i\sqrt{1-z^2}\,\right)$$

Definimos:

$$\boxed{\operatorname{Arcsen} z = \frac{\pi}{2} + i\operatorname{Log}\left(z \pm i\sqrt{1-z^2}\,\right)}$$

El valor principal (o rama principal) del arcoseno, que notaremos por $\operatorname{arcsen} z$, se define eligiendo el logaritmo principal:

$$\boxed{\operatorname{arcsen} z = \frac{\pi}{2} + i\log\left(z + i\sqrt{1-z^2}\,\right) \qquad z \in \mathbb{C}}$$

y es una función holomorfa en $\mathbb{C} \setminus (]-\infty, -1] \cup [1, +\infty[)$.
Observa que:

$$\operatorname{arcsen} z = \frac{\pi}{2} - \arccos z$$

Dado $z \in \mathbb{C}$ hay infinitos $w \in \mathbb{C}$ tales que $z = \operatorname{tg} w$. El conjunto de todos ellos lo representaremos por $\operatorname{Arctg} z$ y viene dado por:

$$\boxed{\operatorname{Arctg} z = \frac{1}{2i} \operatorname{Log}\left(\frac{1+iz}{1-iz}\right) \qquad (z \neq \pm i)}$$

Dado $z \in \mathbb{C}$ hay infinitos $w \in \mathbb{C}$ tales que $z = \operatorname{tg} w$. El conjunto de todos ellos lo representaremos por $\operatorname{Arctg} z$ y viene dado por:

$$\boxed{\operatorname{Arctg} z = \frac{1}{2i} \operatorname{Log}\left(\frac{1+iz}{1-iz}\right) \qquad (z \neq \pm i)}$$

Definimos el valor principal (o rama principal) de $\operatorname{Arctg} z$ por:

$$\boxed{\operatorname{arctg} z = \frac{1}{2i} \log\left(\frac{1+iz}{1-iz}\right) \qquad (z \neq \pm i)}$$

Dado $z \in \mathbb{C}$ hay infinitos $w \in \mathbb{C}$ tales que $z = \operatorname{tg} w$. El conjunto de todos ellos lo representaremos por $\operatorname{Arctg} z$ y viene dado por:

$$\boxed{\operatorname{Arctg} z = \frac{1}{2i} \operatorname{Log}\left(\frac{1+iz}{1-iz}\right) \qquad (z \neq \pm i)}$$

Definimos el valor principal (o rama principal) de $\operatorname{Arctg} z$ por:

$$\boxed{\operatorname{arctg} z = \frac{1}{2i} \log\left(\frac{1+iz}{1-iz}\right) \qquad (z \neq \pm i)}$$

La función $\operatorname{arctg} z$ es holomorfa en $\mathbb{C} \setminus \{i\rho : \rho \in \mathbb{R}, |\rho| \geqslant 1\}$

Dado $z \in \mathbb{C}$ hay infinitos $w \in \mathbb{C}$ tales que $z = \operatorname{tg} w$. El conjunto de todos ellos lo representaremos por $\operatorname{Arctg} z$ y viene dado por:

$$\boxed{\operatorname{Arctg} z = \frac{1}{2i} \operatorname{Log}\left(\frac{1+iz}{1-iz}\right) \qquad (z \neq \pm i)}$$

Definimos el valor principal (o rama principal) de $\operatorname{Arctg} z$ por:

$$\boxed{\operatorname{arctg} z = \frac{1}{2i} \log\left(\frac{1+iz}{1-iz}\right) \qquad (z \neq \pm i)}$$

La función $\operatorname{arctg} z$ es holomorfa en $\mathbb{C} \setminus \{i\rho : \rho \in \mathbb{R}, |\rho| \geqslant 1\}$

Es fácil probar que la rama principal del arcotangente complejo extiende a la función arcotangente real.

Una **correspondencia** de un conjunto A en otro B es una aplicación de A en el conjunto, $\mathcal{P}(B)$, de las partes de B. Es decir, si $\mathcal{F}$ es una correspondencia de A en B, entonces para cada $a \in A$ $\mathcal{F}(a)$ es un subconjunto de B. Suele decirse que los elementos de $\mathcal{F}(a)$ son los "valores que $\mathcal{F}$ toma en a". Al estudiar las funciones complejas elementales han aparecido de forma natural algunas correspondencias:

Una **correspondencia** de un conjunto A en otro B es una aplicación de A en el conjunto, $\mathcal{P}(B)$, de las partes de B. Es decir, si $\mathcal{F}$ es una correspondencia de A en B, entonces para cada $a \in A$ $\mathcal{F}(a)$ es un subconjunto de B. Suele decirse que los elementos de $\mathcal{F}(a)$ son los "valores que $\mathcal{F}$ toma en a". Al estudiar las funciones complejas elementales han aparecido de forma natural algunas correspondencias:

- La dada por $\mathcal{F}(z) = \operatorname{Log}(z)$ que a cada $z \neq 0$ hace corresponder el conjunto $\operatorname{Log}(z)$ de todos los logaritmos de z.

Una **correspondencia** de un conjunto A en otro B es una aplicación de A en el conjunto, $\mathcal{P}(B)$, de las partes de B. Es decir, si $\mathcal{F}$ es una correspondencia de A en B, entonces para cada $a \in A$ $\mathcal{F}(a)$ es un subconjunto de B. Suele decirse que los elementos de $\mathcal{F}(a)$ son los "valores que $\mathcal{F}$ toma en a". Al estudiar las funciones complejas elementales han aparecido de forma natural algunas correspondencias:

- La dada por $\mathcal{F}(z) = \operatorname{Log}(z)$ que a cada $z \neq 0$ hace corresponder el conjunto $\operatorname{Log}(z)$ de todos los logaritmos de z.
- La dada por $\mathcal{F}(z) = [z^{1/n}]$ que a cada complejo $z \neq 0$ hace corresponder el conjunto formado por sus n raíces n-ésimas.

Una **correspondencia** de un conjunto A en otro B es una aplicación de A en el conjunto, $\mathscr{P}(B)$, de las partes de B. Es decir, si $\mathscr{F}$ es una correspondencia de A en B, entonces para cada $a \in A$ $\mathscr{F}(a)$ es un subconjunto de B. Suele decirse que los elementos de $\mathscr{F}(a)$ son los "valores que $\mathscr{F}$ toma en a". Al estudiar las funciones complejas elementales han aparecido de forma natural algunas correspondencias:

- La dada por $\mathscr{F}(z) = \operatorname{Log}(z)$ que a cada $z \neq 0$ hace corresponder el conjunto $\operatorname{Log}(z)$ de todos los logaritmos de z.
- La dada por $\mathscr{F}(z) = [z^{1/n}]$ que a cada complejo $z \neq 0$ hace corresponder el conjunto formado por sus n raíces n-ésimas.
- La dada por $\mathscr{F}(z) = \operatorname{Arg}(z)$ que a cada complejo $z \neq 0$ hace corresponder el conjunto formado por todos sus argumentos.

Una **correspondencia** de un conjunto A en otro B es una aplicación de A en el conjunto, $\mathcal{P}(B)$, de las partes de B. Es decir, si $\mathcal{F}$ es una correspondencia de A en B, entonces para cada $a \in A$ $\mathcal{F}(a)$ es un subconjunto de B. Suele decirse que los elementos de $\mathcal{F}(a)$ son los "valores que $\mathcal{F}$ toma en a". Al estudiar las funciones complejas elementales han aparecido de forma natural algunas correspondencias:

- La dada por $\mathcal{F}(z) = \operatorname{Log}(z)$ que a cada $z \neq 0$ hace corresponder el conjunto $\operatorname{Log}(z)$ de todos los logaritmos de z.
- La dada por $\mathcal{F}(z) = [z^{1/n}]$ que a cada complejo $z \neq 0$ hace corresponder el conjunto formado por sus n raíces n-ésimas.
- La dada por $\mathcal{F}(z) = \operatorname{Arg}(z)$ que a cada complejo $z \neq 0$ hace corresponder el conjunto formado por todos sus argumentos.

Una **correspondencia** de un conjunto A en otro B es una aplicación de A en el conjunto, $\mathcal{P}(B)$, de las partes de B. Es decir, si $\mathcal{F}$ es una correspondencia de A en B, entonces para cada $a \in A$ $\mathcal{F}(a)$ es un subconjunto de B. Suele decirse que los elementos de $\mathcal{F}(a)$ son los "valores que $\mathcal{F}$ toma en a". Al estudiar las funciones complejas elementales han aparecido de forma natural algunas correspondencias:

- La dada por $\mathcal{F}(z) = \operatorname{Log}(z)$ que a cada $z \neq 0$ hace corresponder el conjunto $\operatorname{Log}(z)$ de todos los logaritmos de z.
- La dada por $\mathcal{F}(z) = [z^{1/n}]$ que a cada complejo $z \neq 0$ hace corresponder el conjunto formado por sus n raíces n-ésimas.
- La dada por $\mathcal{F}(z) = \operatorname{Arg}(z)$ que a cada complejo $z \neq 0$ hace corresponder el conjunto formado por todos sus argumentos.

En general, si $\mathcal{F}$ es una correspondencia compleja, es decir, una correspondencia de un subconjunto de $\mathbb{C}$ en $\mathbb{C}$, cualquier función $h : A \to \mathbb{C}$ que verifique $h(z) \in \mathcal{F}(z)$ para todo $z \in A \subset \mathbb{C}$ se llama una **rama** o una **determinación** de $\mathcal{F}$ en A. El logaritmo principal, el valor principal de la raíz n-ésima y el argumento principal son ramas de las respectivas correspondencias.

En el contexto de la variable compleja es frecuente llamar a las correspondencias **“funciones multiformes”** y también **“funciones multivaluadas”**.

En el contexto de la variable compleja es frecuente llamar a las correspondencias **“funciones multiformes”** y también **“funciones multivaluadas”**.

El problema en el que estamos interesados es el siguiente:

En el contexto de la variable compleja es frecuente llamar a las correspondencias **“funciones multiformes”** y también **“funciones multivaluadas”**.

El problema en el que estamos interesados es el siguiente:

Dados un conjunto $\Omega \subset \mathbb{C}$, una correspondencia compleja $\mathcal{F}$ definida en Ω y un conjunto $A \subset \Omega$, queremos saber si puede asegurarse la existencia en A de ramas continuas o ramas holomorfas de $\mathcal{F}$.

En el contexto de la variable compleja es frecuente llamar a las correspondencias **“funciones multiformes”** y también **“funciones multivaluadas”**.

El problema en el que estamos interesados es el siguiente:

Dados un conjunto $\Omega \subset \mathbb{C}$, una correspondencia compleja $\mathcal{F}$ definida en Ω y un conjunto $A \subset \Omega$, queremos saber si puede asegurarse la existencia en A de ramas continuas o ramas holomorfas de $\mathcal{F}$.

Este problema no siempre tiene solución. Por ejemplo, no existen ramas continuas del argumento en ningún conjunto que contenga a la circunferencia unidad. Por otra parte, hemos visto que en todo disco abierto que no contenga al origen hay ramas continuas del argumento y ramas holomorfas del logaritmo y, por tanto, ramas holomorfas de la raíz n-ésima cualquiera sea $n \in \mathbb{N}$.

Sea $A \subset \mathbb{C}^*$ un conjunto conexo no vacío.

a) Supongamos que φ y ψ son ramas continuas del argumento en A. Entonces existe un número entero $k \in \mathbb{Z}$ tal que $\varphi(z) = \psi(z) + 2k\pi$ para todo $z \in A$.

Sea $A \subset \mathbb{C}^*$ un conjunto conexo no vacío.

a) Supongamos que φ y ψ son ramas continuas del argumento en A. Entonces existe un número entero $k \in \mathbb{Z}$ tal que $\varphi(z) = \psi(z) + 2k\pi$ para todo $z \in A$.

b) Supongamos que f y g son ramas continuas del logaritmo en A. Entonces existe un número entero $k \in \mathbb{Z}$ tal que $f(z) = g(z) + i2k\pi$ para todo $z \in A$.

Sea $A \subset \mathbb{C}^*$ un conjunto conexo no vacío.

a) Supongamos que φ y ψ son ramas continuas del argumento en A. Entonces existe un número entero $k \in \mathbb{Z}$ tal que $\varphi(z) = \psi(z) + 2k\pi$ para todo $z \in A$.

b) Supongamos que f y g son ramas continuas del logaritmo en A. Entonces existe un número entero $k \in \mathbb{Z}$ tal que $f(z) = g(z) + i2k\pi$ para todo $z \in A$.

c) Supongamos que α y β son ramas continuas de la raíz n-ésima en A. Entonces hay un número u que es una raíz n-ésima de 1 tal que $\alpha(z) = u\beta(z)$ para todo $z \in A$.

Sea $A \subset \mathbb{C}^*$ un conjunto conexo no vacío.

a) Supongamos que φ y ψ son ramas continuas del argumento en A. Entonces existe un número entero $k \in \mathbb{Z}$ tal que $\varphi(z) = \psi(z) + 2k\pi$ para todo $z \in A$.

b) Supongamos que f y g son ramas continuas del logaritmo en A. Entonces existe un número entero $k \in \mathbb{Z}$ tal que $f(z) = g(z) + i2k\pi$ para todo $z \in A$.

c) Supongamos que α y β son ramas continuas de la raíz n-ésima en A. Entonces hay un número u que es una raíz n-ésima de 1 tal que $\alpha(z) = u\beta(z)$ para todo $z \in A$.

Sea $\Omega \subset \mathbb{C}^*$ un dominio.

Sea $A \subset \mathbb{C}^*$ un conjunto conexo no vacío.

a) Supongamos que φ y ψ son ramas continuas del argumento en A. Entonces existe un número entero $k \in \mathbb{Z}$ tal que $\varphi(z) = \psi(z) + 2k\pi$ para todo $z \in A$.

b) Supongamos que f y g son ramas continuas del logaritmo en A. Entonces existe un número entero $k \in \mathbb{Z}$ tal que $f(z) = g(z) + i2k\pi$ para todo $z \in A$.

c) Supongamos que α y β son ramas continuas de la raíz n-ésima en A. Entonces hay un número u que es una raíz n-ésima de 1 tal que $\alpha(z) = u\beta(z)$ para todo $z \in A$.

Sea $\Omega \subset \mathbb{C}^*$ un dominio.

i) Si en Ω hay una rama holomorfa del logaritmo entonces hay infinitas ramas holomorfas del logaritmo, todas ellas se obtienen a partir de una dada sumando una constante de la forma $2k\pi i$ donde $k \in \mathbb{Z}$.

Sea $A \subset \mathbb{C}^*$ un conjunto conexo no vacío.

a) Supongamos que φ y ψ son ramas continuas del argumento en A. Entonces existe un número entero $k \in \mathbb{Z}$ tal que $\varphi(z) = \psi(z) + 2k\pi$ para todo $z \in A$.

b) Supongamos que f y g son ramas continuas del logaritmo en A. Entonces existe un número entero $k \in \mathbb{Z}$ tal que $f(z) = g(z) + i2k\pi$ para todo $z \in A$.

c) Supongamos que α y β son ramas continuas de la raíz n-ésima en A. Entonces hay un número u que es una raíz n-ésima de 1 tal que $\alpha(z) = u\beta(z)$ para todo $z \in A$.

Sea $\Omega \subset \mathbb{C}^*$ un dominio.

i) Si en Ω hay una rama holomorfa del logaritmo entonces hay infinitas ramas holomorfas del logaritmo, todas ellas se obtienen a partir de una dada sumando una constante de la forma $2k\pi i$ donde $k \in \mathbb{Z}$.

ii) Si en Ω hay una rama holomorfa de la raíz n-ésima entonces hay exactamente n ramas holomorfas de la raíz n-ésima, todas ellas se obtienen a partir de una dada multiplicando por las raíces n-ésimas de la unidad.

Dado un número real, α, llamaremos $\arg_\alpha$ a la rama del argumento definida para todo $z \in \mathbb{C}_\alpha$ por $\arg_\alpha(z) = \mathrm{Arg}(z) \cap]\alpha, \alpha + 2\pi[$. Es decir, $\arg_\alpha(z)$ es el único argumento de $z \in \mathbb{C}_\alpha$ que está en el intervalo $]\alpha, \alpha + 2\pi[$.

Dado un número real, α, llamaremos $\arg_\alpha$ a la rama del argumento definida para todo $z \in \mathbb{C}_\alpha$ por $\arg_\alpha(z) = \operatorname{Arg}(z) \cap]\alpha, \alpha + 2\pi[$. Es decir, $\arg_\alpha(z)$ es el único argumento de $z \in \mathbb{C}_\alpha$ que está en el intervalo $]\alpha, \alpha + 2\pi[$.

La rama del argumento $\arg_\alpha$ viene dada para todo $z \in \mathbb{C}_\alpha$ por:

$$\arg_\alpha(z) = \arg(-z\,\mathrm{e}^{-i\alpha}) + \pi + \alpha$$

Dicha rama es continua en $\mathbb{C}_\alpha$.

La rama $\arg_\alpha(z)$ puede extenderse a todo $\mathbb{C}^*$ definiéndola en los puntos de la semirrecta S_α.

La rama $\arg_\alpha(z)$ puede extenderse a todo $\mathbb{C}^*$ definiéndola en los puntos de la semirrecta S_α.Sea $z_0 = \rho\,\mathrm{e}^{i\alpha}$ con $\rho > 0$. Definamos $z_n = (\rho + i/n)\,\mathrm{e}^{i\alpha}$. Tenemos que $\{z_n\} \to z_0$ y

La rama $\arg_\alpha(z)$ puede extenderse a todo $\mathbb{C}^*$ definiéndola en los puntos de la semirrecta S_α.Sea $z_0 = \rho\,\mathrm{e}^{i\alpha}$ con $\rho > 0$. Definamos $z_n = (\rho + i/n)\,\mathrm{e}^{i\alpha}$. Tenemos que $\{z_n\} \to z_0$ y

$$\arg_\alpha(z_n) = \arg(-z_n\,\mathrm{e}^{-i\alpha}) + \pi + \alpha = \arg(-\rho - i/n) + \pi + \alpha \to -\pi + \pi + \alpha = \alpha$$

La rama $\arg_\alpha(z)$ puede extenderse a todo $\mathbb{C}^*$ definiéndola en los puntos de la semirrecta S_α.Sea $z_0 = \rho\,\mathrm{e}^{i\alpha}$ con $\rho > 0$. Definamos $z_n = (\rho + i/n)\,\mathrm{e}^{i\alpha}$. Tenemos que $\{z_n\} \to z_0$ y

$$\arg_\alpha(z_n) = \arg(-z_n\,\mathrm{e}^{-i\alpha}) + \pi + \alpha = \arg(-\rho - i/n) + \pi + \alpha \to -\pi + \pi + \alpha = \alpha$$

Definamos ahora $z_n = (\rho - i/n)\,\mathrm{e}^{i\alpha}$. Tenemos que $\{z_n\} \to z_0$ y

La rama $\arg_\alpha(z)$ puede extenderse a todo $\mathbb{C}^*$ definiéndola en los puntos de la semirrecta S_α.Sea $z_0 = \rho\, e^{i\alpha}$ con $\rho > 0$. Definamos $z_n = (\rho + i/n)\, e^{i\alpha}$. Tenemos que $\{z_n\} \to z_0$ y

$$\arg_\alpha(z_n) = \arg(-z_n\, e^{-i\alpha}) + \pi + \alpha = \arg(-\rho - i/n) + \pi + \alpha \to -\pi + \pi + \alpha = \alpha$$

Definamos ahora $z_n = (\rho - i/n)\, e^{i\alpha}$. Tenemos que $\{z_n\} \to z_0$ y

$$\arg_\alpha(z_n) = \arg(-z_n\, e^{-i\alpha}) + \pi + \alpha = \arg(-\rho + i/n) + \pi + \alpha \to \pi + \pi + \alpha = \alpha + 2\pi$$

La rama $\arg_\alpha(z)$ puede extenderse a todo $\mathbb{C}^*$ definiéndola en los puntos de la semirrecta S_α.Sea $z_0 = \rho\, e^{i\alpha}$ con $\rho > 0$. Definamos $z_n = (\rho + i/n)\, e^{i\alpha}$. Tenemos que $\{z_n\} \to z_0$ y

$$\arg_\alpha(z_n) = \arg(-z_n\, e^{-i\alpha}) + \pi + \alpha = \arg(-\rho - i/n) + \pi + \alpha \to -\pi + \pi + \alpha = \alpha$$

Definamos ahora $z_n = (\rho - i/n)\, e^{i\alpha}$. Tenemos que $\{z_n\} \to z_0$ y

$$\arg_\alpha(z_n) = \arg(-z_n\, e^{-i\alpha}) + \pi + \alpha = \arg(-\rho + i/n) + \pi + \alpha \to \pi + \pi + \alpha = \alpha + 2\pi$$

Esto nos dice que la función $\arg_\alpha$ no tiene límite en los puntos de S_α. Por tanto, cualquier extensión que hagamos de dicha función a $\mathbb{C}^*$ será discontinua en S_α.

Tenemos dos posibles elecciones razonables para definir $\arg_\alpha$ en S_α: o bien definimos $\arg_\alpha(z) = \alpha$ o bien definimos $\arg_\alpha(z) = \alpha + 2\pi$ para todo $z \in S_\alpha$.

Tenemos dos posibles elecciones razonables para definir $\arg_\alpha$ en S_α: o bien definimos $\arg_\alpha(z) = \alpha$ o bien definimos $\arg_\alpha(z) = \alpha + 2\pi$ para todo $z \in S_\alpha$.

En ambos casos la función así extendida, que seguiremos notando igual, será discontinua en S_α. Pero en el primero será continua cuando nos acerquemos a puntos de S_α por el semiplano $\alpha < \arg_\alpha(z) < \alpha + \pi$, y en el segundo será continua cuando nos acerquemos a puntos de S_α por el semiplano $\alpha + \pi < \arg_\alpha(z) < \alpha + 2\pi$.

Tenemos dos posibles elecciones razonables para definir $\arg_\alpha$ en S_α: o bien definimos $\arg_\alpha(z) = \alpha$ o bien definimos $\arg_\alpha(z) = \alpha + 2\pi$ para todo $z \in S_\alpha$.

En ambos casos la función así extendida, que seguiremos notando igual, será discontinua en S_α. Pero en el primero será continua cuando nos acerquemos a puntos de S_α por el semiplano $\alpha < \arg_\alpha(z) < \alpha + \pi$, y en el segundo será continua cuando nos acerquemos a puntos de S_α por el semiplano $\alpha + \pi < \arg_\alpha(z) < \alpha + 2\pi$.

En el primer caso la función $\arg_\alpha$ toma valores en $[\alpha, \alpha + 2\pi[$ y en el segundo caso en $]\alpha, \alpha + 2\pi]$. La elección de una u otra posibilidad dependerá de cada situación concreta.

Tenemos dos posibles elecciones razonables para definir $\arg_\alpha$ en S_α: o bien definimos $\arg_\alpha(z) = \alpha$ o bien definimos $\arg_\alpha(z) = \alpha + 2\pi$ para todo $z \in S_\alpha$.

En ambos casos la función así extendida, que seguiremos notando igual, será discontinua en S_α. Pero en el primero será continua cuando nos acerquemos a puntos de S_α por el semiplano $\alpha < \arg_\alpha(z) < \alpha + \pi$, y en el segundo será continua cuando nos acerquemos a puntos de S_α por el semiplano $\alpha + \pi < \arg_\alpha(z) < \alpha + 2\pi$.

En el primer caso la función $\arg_\alpha$ toma valores en $[\alpha, \alpha + 2\pi[$ y en el segundo caso en $]\alpha, \alpha + 2\pi]$. La elección de una u otra posibilidad dependerá de cada situación concreta.

Observa también que, al ser $S_\alpha = S_{\alpha+2k\pi}$ con $k \in \mathbb{Z}$, las ramas $\arg_\alpha$ y $\arg_{\alpha+2k\pi}$ son continuas en $\mathbb{C}_\alpha$.

Tenemos dos posibles elecciones razonables para definir $\arg_\alpha$ en S_α: o bien definimos $\arg_\alpha(z) = \alpha$ o bien definimos $\arg_\alpha(z) = \alpha + 2\pi$ para todo $z \in S_\alpha$.

En ambos casos la función así extendida, que seguiremos notando igual, será discontinua en S_α. Pero en el primero será continua cuando nos acerquemos a puntos de S_α por el semiplano $\alpha < \arg_\alpha(z) < \alpha + \pi$, y en el segundo será continua cuando nos acerquemos a puntos de S_α por el semiplano $\alpha + \pi < \arg_\alpha(z) < \alpha + 2\pi$.

En el primer caso la función $\arg_\alpha$ toma valores en $[\alpha, \alpha + 2\pi[$ y en el segundo caso en $]\alpha, \alpha + 2\pi]$. La elección de una u otra posibilidad dependerá de cada situación concreta.

Observa también que, al ser $S_\alpha = S_{\alpha+2k\pi}$ con $k \in \mathbb{Z}$, las ramas $\arg_\alpha$ y $\arg_{\alpha+2k\pi}$ son continuas en $\mathbb{C}_\alpha$.

Convenio. A efectos de este curso, si no se especifica lo contrario, entenderemos que $\arg_\alpha(z) = \alpha + 2\pi$ para todo $z \in S_\alpha$. Con este convenio tenemos que $\arg_{-\pi}$ coincide con el argumento principal.

Para cada $\alpha \in \mathbb{R}$ representaremos por $\log_\alpha$ la rama del logaritmo definida en $\mathbb{C}^*$ por

$$\boxed{\log_\alpha(z) = \log|z| + i\arg_\alpha(z)}$$

Dicha rama es holomorfa en $\mathbb{C}^* \setminus S_\alpha$ y es discontinua en S_α.

Para cada $\alpha \in \mathbb{R}$ representaremos por $\log_\alpha$ la rama del logaritmo definida en $\mathbb{C}^*$ por

$$\boxed{\log_\alpha(z) = \log|z| + i\arg_\alpha(z)}$$

Dicha rama es holomorfa en $\mathbb{C}^* \setminus S_\alpha$ y es discontinua en S_α.

Para cada $\alpha \in \mathbb{R}$ representaremos por $[z^{1/n}]_\alpha$ la rama de la raíz n-ésima definida en $\mathbb{C}^*$ por

$$\boxed{[z^{1/n}]_\alpha = e^{\log_\alpha(z)/n} = \sqrt[n]{|z|}\, e^{i\arg_\alpha(z)/n}}$$

Dicha rama es holomorfa en $\mathbb{C}^* \setminus S_\alpha$ y es discontinua en S_α.

Para cada $\alpha \in \mathbb{R}$ representaremos por $\log_\alpha$ la rama del logaritmo definida en $\mathbb{C}^*$ por

$$\boxed{\log_\alpha(z) = \log|z| + i \arg_\alpha(z)}$$

Dicha rama es holomorfa en $\mathbb{C}^* \setminus S_\alpha$ y es discontinua en S_α.

Para cada $\alpha \in \mathbb{R}$ representaremos por $[z^{1/n}]_\alpha$ la rama de la raíz n-ésima definida en $\mathbb{C}^*$ por

$$\boxed{[z^{1/n}]_\alpha = e^{\log_\alpha(z)/n} = \sqrt[n]{|z|}\, e^{i \arg_\alpha(z)/n}}$$

Dicha rama es holomorfa en $\mathbb{C}^* \setminus S_\alpha$ y es discontinua en S_α.

Observación. Con la notación que acabamos de introducir y el convenio anterior, la rama $\log_{-\pi}$ coincide con la rama principal del logaritmo, por lo que seguiremos usando para ella la notación usual $\log_{-\pi}(z) = \log(z)$. Análoga situación se tiene para la rama $[z^{1/n}]_{-\pi}$ que coincide con la rama principal de la raíz n-ésima, por lo que mantendremos para ella la notación usual $[z^{1/n}]_{-\pi} = \sqrt[n]{z} = z^{1/n}$.
Observa también que, por lo antes dicho, la rama $\log_{\alpha+2k\pi}$ donde $k \in \mathbb{Z}$ es holomorfa en $\mathbb{C}_\alpha$ y discontinua en S_α.